I On considère la fonction φ réelle, de variable réelle, définie par :

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\left[\alpha\,(\mathrm{Log}\,|x|)^{\alpha-1} - k\,(\mathrm{Log}\,|x|)^{\alpha}\right]$$

où α et k sont des paramètres *entiers* donnés (avec $\alpha > 0$ et $k > 1$).

1° Étudier le sens de variation de φ lorsque $\alpha = 1$ et tracer, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'axes $x'x$, $y'y$, le graphique de cette fonction dans ce cas particulier.

2° Étudier le sens de variation de φ dans le cas général (α entier strictement supérieur à 1). On déterminera les différentes formes des graphiques des fonctions φ en faisant apparaître sur les dessins les abscisses des points d'intersection avec l'axe $x'x$ ainsi que les abscisses des extréma. (On ne demande pas le calcul précis de ces extréma.)

3° En utilisant les résultats précédents, déterminer le nombre des solutions sur $]0, +\infty[$ de l'équation d'inconnue x :

$$\alpha\,(\mathrm{Log}\,|x|)^{\alpha-1} - k(\mathrm{Log}\,|x|)^{\alpha} + \lambda x(1-k) = 0$$

λ étant un paramètre réel.

II 1° Résoudre l'équation différentielle du premier ordre (où les entiers α et k vérifient les conditions $\alpha > 1$ et $k > 1$) :

$$y'x^{k+1} + (k-1)x^k y = \alpha\,[\,\mathrm{Log}\,|x|\,]^{\alpha-1} - [\mathrm{Log}\,|x|\,]^{\alpha}\ .$$

Déterminer la fonction f, solution sur $]0, +\infty[$ de cette équation, telle que $f(1) = \lambda$ où λ est un paramètre réel donné. On désignera cette fonction par $f_{\alpha,k,\lambda}$.

2° Étudier les différentes formes des graphiques des fonctions $f_{\alpha,k,\lambda}$ en discutant d'abord suivant les valeurs prises par α et, ensuite, à l'intérieur de chacun des cas, suivant les valeurs prises par λ. (On ne demande pas de discuter les signes des extréma, ni de les comparer.)

3° Étudier, suivant les valeurs données à k et à λ, l'existence des intégrales généralisées :

$$\int_0^1 f_{\alpha,k,\lambda}(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} f_{\alpha,k,\lambda}(x)\,dx\ .$$

4° On suppose $k \geqslant 3$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_{\alpha,k,\lambda}(x)\,dx$.

(On pourra utiliser un changement de variable permettant de ramener le calcul à celui d'une intégrale du type : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\beta}dt$.)

III On suppose toujours α entier ($\alpha \geqslant 1$) et k entier ($k \geqslant 2$).

On définit la fonction ρ réelle, de variable réelle, au moyen des formules suivantes :

$$\rho(x) = 0 \quad \text{si} \quad x < 1$$

$$\rho(x) = \frac{C\,(\mathrm{Log}\,|x|)^{\alpha}}{x^k} \quad \text{si} \quad x \geqslant 1\ .$$

1° Montrer que, pour un certain choix de la constante C, la fonction ρ peut être considérée comme la fonction de densité d'une variable aléatoire réelle X. Calculer C. Déterminer la condition pour que cette variable aléatoire admette une espérance mathématique, de même pour qu'elle admette une variance. Calculer ces deux nombres.

2° On pose : $I(k, \lambda, \alpha) = \displaystyle\int_{\lambda}^{+\infty} \rho(x)dx$ pour $\lambda > 1$.

Montrer :

a. $$I(k, \lambda, \alpha) = \frac{C\,(\mathrm{Log}\,\lambda)^{\alpha}}{(k-1)\lambda^{k-1}} - \frac{\alpha}{1-k}\,I(k, \lambda, \alpha-1)\ .$$

b. $$I(k, \lambda, \alpha-1) \leqslant \frac{1}{\mathrm{Log}\,\lambda}\,I(k, \lambda, \alpha)\ .$$

En déduire lorsque λ tend vers $+\infty$ un équivalent pour $I(k, \lambda, \alpha)$.

3° On pose $a_n = \mathrm{Prob}\,(X \geqslant \sqrt{n})$. Déterminer a_n par une intégrale et étudier la nature de la série numérique $\displaystyle\sum_1^{\infty} a_n$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail